

(b) In sampling from $N(\mu, \sigma^2)$, μ unknown, derive $100(1 - \alpha)\%$ shortest confidence interval for σ^2 . 20

(c) Discuss how you would graphically perform the sequential probability ratio test for a simple hypothesis regarding the mean of a normal population with known standard deviation against a simple alternative. 20

3. (a) Define probability generating function (pgf) of a discrete random variable.

Let X be a random variable with p.m.f.

$$P\{X = j\} = p_j, j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Set } P\{X > j\} = q_j, j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{and define } Q(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j.$$

Show that $Q(s) = [1 - P(s)] / [1 - s]$, $|s| < 1$, where $P(s)$ is the pgf of X . 20

(b) For the p.d.f.

$$f(x; \theta) = \begin{cases} 1 / [\pi \{1 + (x - \theta)^2\}], & -\infty < x < \infty \\ 0 & , \text{ elsewhere} \end{cases}$$

derive Rao-Cramer lower bound of variance of an unbiased estimator of θ . 20

(ख) $N(\mu, \sigma^2)$, μ अज्ञात, से प्रतिचयन में σ^2 के $100(1 - \alpha)\%$ लघुतम विश्वास्यता अंतराल को ज्ञात कीजिए। 20

(ग) चर्चा कीजिए कि ज्ञात मानक विचलन वाले एक प्रसामान्य समष्टि के माध्य के विषय में एक सरल परिकल्पना के लिए एक सरल वैकल्पिक परिकल्पना के विरुद्ध आप अनुक्रमिक प्रायिकता अनुपात परीक्षण को आलेखीय तरीके से कैसे सम्पन्न करेंगे ? 20

3. (क) एक असंतत यादृच्छिक चर के प्रायिकता जनक फलन (pgf) की परिभाषा दीजिए।

माना कि X एक यादृच्छिक चर है जिसका प्रायिकता द्रव्यमान फलन (p.m.f.)

$$P\{X = j\} = p_j, j = 0, 1, 2, \dots$$

लीजिए $P\{X > j\} = q_j, j = 0, 1, 2, \dots$

और परिभाषा कीजिए $Q(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j$ ।

सिद्ध कीजिए कि $Q(s) = [1 - P(s)] / [1 - s], |s| < 1$, जहां कि $P(s)$ X का प्रायिकता जनक फलन (p.g.f.) है।

20

(ख) प्रायिकता घनत्व फलन (p.d.f.)

$$f(x; \theta) = \begin{cases} 1 / [\pi \{1 + (x - \theta)^2\}], & -\infty < x < \infty \\ 0 & , \text{ अन्यत्र} \end{cases}$$

के लिए θ के अनभिन्नत आकलक के प्रसरण का रॉब-क्रामर निम्न परिबंध व्युत्पन्न कीजिए। 20

- (c) Show that the likelihood ratio test, for the hypothesis that the means of K independent normal populations with common variance are identical, boils down to F -test. 20
4. (a) The daily demand (in kg) of fish of a certain variety upto 12 noon with a retailer follows exponential law with mean 25. He makes a profit of Rs. 20 on an average for each kg he is able to sell by 12 noon, and incurs a loss of Rs. 10 on an average for each kg that remains unsold after 12 noon.

What is the optimum daily stock he should procure ? 20

- (b) For the Pareto distribution with distribution function

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (\theta/x)^\alpha & , \quad x \geq \theta \\ 0 & , \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

derive the p.d.f. Also obtain its harmonic mean and variance. 20

- (c) Define (i) most powerful test, and (ii) unbiased test of a simple hypothesis against a simple alternative.

Show that a most powerful test is necessarily unbiased. 20

(ग) दिखाइए कि सार्व प्रसरण वाले K स्वतंत्र प्रसामान्य समष्टियों के माध्य समान हैं की परिकल्पना के लिए संभावित अनुपात परीक्षण F -परीक्षण हो जाता है। 20

4. (क) एक परचूनिया की दोपहर 12 बजे तक एक खास किस्म की मछली की प्रतिदिन की मांग (कि०ग्रा० में) माध्य 25 वाले एक चरघातांकी नियम का पालन करती है। प्रति कि.ग्रा. जोकि वह दोपहर 12 बजे तक बेच पाता है उसे औसतन 20 रुपए का लाभ होता है और दोपहर 12 बजे तक जो मछलियां बिना बिकी रह जाती हैं उसे प्रति कि.ग्रा. औसतन 10 रु. का घाटा होता है।

प्रतिदिन का इष्टतम स्टॉक जोकि उसे प्राप्त करना चाहिए, क्या है ? 20

(ख) पैरेटो बंटन के जिसका बंटन फलन

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (\theta/x)^\alpha, & x \geq \theta \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

है, प्रायिकता घनत्व फलन को व्युत्पन्न कीजिए। इसके हरात्मक माध्य और प्रसरण को भी प्राप्त कीजिए। 20

(ग) परिभाषा दीजिए (i) शक्ततम परीक्षण, और (ii) एक सरल वैकल्पिक परिकल्पना के विरुद्ध एक सरल परिकल्पना का अनभिन्नत परीक्षण।

दिखाइए कि एक शक्ततम परीक्षण अनिवार्यतः अनभिन्नत होता है। 20

SECTION—B

5. Answer any **FIVE** of the following parts :—

12×5=60

- (a) A committee of 5 is to be formed from amongst 86 officers, numbered serially from 1 to 86. Draw a circular systematic sample for this purpose, giving the procedure you have followed in detail. You may use the following set of random numbers :

1349 0417 9311 9787 1284 0769 8422 1077.

- (b) Examine, after deducing necessary result, if the following set of correlation coefficients are internally consistent :

$$r_{12} = 0.62, r_{13} = 0.55 \text{ and } r_{23} = -0.42.$$

- (c) Locate 5 points at random on a rectangular paddy field measuring 30 m × 20 m for conducting a crop-cutting experiment. The points are to be located using rectangular co-ordinates to nearest decimeters with one corner of the plot as origin. The following set of random numbers may be used :

2292 2933 6125 2464 1038 3163 3569 7155
2029 2538 7080 3027 6215 3125 5856 9543

खण्ड—ख

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच उपभागों के उत्तर दीजिए :—

12×5=60

(क) 1 से 86 तक क्रमिकतः अंकित 86 ऑफिसरों में से 5 की एक कमेटी बनानी है। कार्यविधि का जिसका आपने पालन किया है विस्तार में वर्णन करते हुए, उपर्युक्त उद्देश्य के लिए एक वृत्तीय क्रमबद्ध प्रतिदर्श चुनिए। आप यादृच्छिक संख्याओं के निम्नलिखित समुच्चय का उपयोग कर सकते हैं :

1349 0417 9311 9787 1284 0769 8422 1077.

(ख) आवश्यक परिणाम का निगमन करने के पश्चात् जांच कीजिए यदि सहसंबंध गुणांकों के निम्न समुच्चय अंतःसंगत हैं :

$$r_{12} = 0.62, r_{13} = 0.55 \text{ और } r_{23} = -0.42.$$

(ग) एक फसल कटाई प्रयोग के संचालन के लिए 30 m × 20 m माप वाले धान के एक आयताकार खेत में यदृच्छया 5 बिन्दु निर्धारित कीजिए। खेत के एक कोने को मूल बिन्दु मानते हुए निकटतम डेसी मी. में आयतीय निर्देशांकों का उपयोग करके बिन्दुओं को निर्धारित करना है। यादृच्छिक संख्याओं के निम्न समुच्चय का उपयोग किया जा सकता है :

2292 2933 6125 2464 1038 3163 3569 7155
2029 2538 7080 3027 6215 3125 5856 9543

- (d) For pps sampling without replacement, give the Horvitz-Thompson estimator of the population total. Show that it is unbiased. Also obtain its variance.
- (e) Suggest a balanced confounded design of a 2^4 experiment in 3 replicates, each replicate containing 4 incomplete blocks of size 4 each, retaining full information on the main effects and the 2nd order interactions.

Give the complete lay-out of one such replicate indicating the factorial effects confounded in it.

- (f) Define a BIBD. Show that for a BIBD with parameters v, b, r, k and λ ,
- (i) $\lambda(v-1) = r(k-1)$ and
- (ii) $b \geq v + r - k$.
6. (a) The vector variable \underline{X} follows p-variate normal distribution with mean vector $\underline{\mu}$ and dispersion matrix $\underline{\Sigma}$. Obtain the distribution of

$$Q = (\underline{X} - \underline{\mu})' \underline{\Sigma}^{-1} (\underline{X} - \underline{\mu}). \quad 20$$

(घ) प्रतिस्थापन रहित आमाप की समानुपाती प्रायिकता प्रतिचयन के लिए, समष्टि योग के हॉर्विज़-थोम्पसन आकलक को दीजिए। सिद्ध कीजिए कि यह अनभिनत है। इसके प्रसरण को भी प्राप्त कीजिए।

(ङ) 3 प्रतिकृतियों में एक 2^4 प्रयोग की एक संतुलित संकरित अभिकल्पना सुझाइए, हरेक प्रतिकृति में आमाप 4 वाले 4 अपूर्ण खंडक, मुख्य प्रभावों और द्वितीय कोटि की अन्योन्य-क्रियाओं पर पूरी सूचना रखते हुए।

इसमें संकरित बहु-उपादानी प्रभावों को बताते हुए एक ऐसी प्रतिकृति का पूर्ण विन्यास दीजिए।

(च) एक संतुलित अपूर्ण खंडक अभिकल्पना (B.I.B.D.) की परिभाषा दीजिए। दिखाइए कि प्राचलों v, b, r, k और λ वाले एक संतुलित अपूर्ण खंडक अभिकल्पना (B.I.B.D.) के लिए

$$(i) \lambda (v - 1) = r(k - 1) \text{ और}$$

$$(ii) b \geq v + r - k.$$

6. (क) सदिश चर \underline{X} माध्य सदिश $\underline{\mu}$ और परिक्षेपण-मैट्रिक्स Σ वाले p -चर प्रसामान्य बंटन का पालन करता है। $Q = (\underline{X} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{X} - \underline{\mu})$ का बंटन प्राप्त कीजिए।

20

(b) Based on a set of data $(x_i, y_{ij}), j = 1(1) n_i, i = 1(1)p$, discuss how you would use the technique of Analysis of Variance for testing the hypothesis that the regression equation of y on x is linear.

20

(c) Use the following set of random numbers to obtain the lay-out of a randomised block design with 5 treatments and 4 blocks, giving the outline of the procedure you have followed :

5711 7343 7539 3684 9397 5335 4031 1486
2588 3301 0553 2427 3598 2580 7017 9176

20

7. (a) The joint p.d.f. of X and Y is given by

$$f(x, y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y (1-p_1-p_2)^{n-x-y},$$

$$x, y = 0(1) n, x + y \leq n$$

$$0 < p_1, p_2 < 1,$$

$$p_1 + p_2 < 1$$

= 0, otherwise.

Find the correlation coefficient between X and Y , as also the regression equation of Y on X .

20

(ख) दत्त $(x_i, y_{ij}), j = 1(1)n_i, i = 1(1)p$ के एक समुच्चय पर आधारित चर्चा कीजिए कि x पर y का समाश्रयण समीकरण एकघाती है इस परिकल्पना के परीक्षण के लिए प्रसरण-विश्लेषण प्रविधि को आप कैसे उपयोग में लायेंगे?

20

(ग) 5 उपचारों और 4 खण्डों वाले एक यादृच्छिकीकृत खण्डक अभिकल्पना के खाके को प्राप्त करने के लिए यादृच्छिक संख्याओं के निम्नलिखित समुच्चय का उपयोग कीजिए, क्रियाविधि की, जिसका आपने पालन किया है, रूपरेखा देते हुए :

5711 7343 7539 3684 9397 5335 4031 1486
2588 3301 0553 2427 3598 2580 7017 9176

20

7. (क) X और Y का संयुक्त प्रायिकता फलन दिया है

$$f(x, y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y (1-p_1-p_2)^{n-x-y},$$

$$x, y = 0(1)n, x + y \leq n$$

$$0 < p_1, p_2 < 1,$$

$$p_1 + p_2 < 1$$

$$= 0, \text{ अन्यथा।}$$

X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक और X पर Y का समाश्रयण समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

20

- (b) A rural block in a district was divided into 3 strata. The following table gives some relevant information :

Stratum No. (h)	Number of Villages (N_h)	Area X_h under wheat (hectares)	S.D. S_{x_h} (hectares)
1	20	620	100.5
2	15	580	90.8
3	25	825	140.7

A sample of 10 villages is to be drawn. How many villages should be selected from different strata using (i) proportional allocation, (ii) optimum allocation, and (iii) allocation proportional to area under crop ? 20

- (c) 3 factors, each at 2 levels, are to be tested in a single experiment using r randomised blocks. Using standard notation, give the expressions for the sums of squares due to different factorial effects. Also give the ANOVA table. 20
8. (a) You are to estimate the proportion of school-going students (Classes V to XII) using mobile phones in a metropolitan city. Suggest a two-stage sampling scheme. Using a suitable notation, give the estimator to be used, and check if the estimator is unbiased. 20

(ख) एक जिले में एक ग्रामीण खंड को 3 स्तरों में विभाजित किया गया। निम्न सारणी में कुछ संबद्ध सूचनाएं दी हैं :—

स्तर संख्या (h)	ग्रामों की संख्या (N_h)	गेहूं का क्षेत्रफल X_h (hectares)	मानक विचलन S_{X_h} (hectares)
1	20	620	100.5
2	15	580	90.8
3	25	825	140.7

10 ग्रामों का एक प्रतिदर्श चुनना है। भिन्न स्तरों से कितने ग्राम चुनने चाहिए, उपयोग करके (i) आनुपातिक नियतन का, (ii) अनुकूलतम नियतन का, और (iii) फसल के क्षेत्रफल से समानुपाती नियतन का ? 20

(ग) 3 उपादानों, प्रत्येक 2 स्तरों पर, का र यादृच्छिकीकृत खंडों का उपयोग करके एक एकल प्रयोग में परीक्षण करना है। मानक संकेतनों का उपयोग करते हुए, भिन्न उपादान प्रभावों के वर्गयोगों के व्यंजक दीजिए। प्रसरण-विश्लेषण सारणी भी दीजिए। 20

8. (क) आपको एक महानगर में मोबाइल फोन्स का उपयोग करने वाले स्कूल जाने वाले छात्रों (कक्षा V से XII) के अनुपात का आकलन करना है। एक द्विचरण प्रतिचयन योजना सुझाइए। एक उपयुक्त संकेतन का उपयोग करते हुए उपयोग में लाए जाने वाले आकलक को दीजिए, और जांच कीजिए कि आकलक अनभिनत है। 20

- (b) Write down the random effects model for a set of two-way classified data with one observation per cell, stating the underlying assumptions completely. What are the hypotheses that can be tested using the ANOVA technique ?

Give the ANOVA table with explicit expressions for the different sums of squares, and the test statistics for the above hypotheses. 20

- (c) Compare completely Randomised Design, Randomised Block Design and Latin Square Design in terms of flexibility for number of treatments and number of replicates per treatment on the one hand, and error-control on the other.

20

(ख) अंतर्निहित अभिधारणाओं का स्पष्टतया उल्लेख करते हुए, प्रति कोष्ठिका एक प्रेक्षण वाले द्विधा वर्गीकृत दत्त के एक समुच्चय के लिए यादृच्छिक प्रभाव निदर्श को लिखिए। कौनसी परिकल्पनाएं हैं जिनका प्रसरण-विश्लेषण प्रविधि का उपयोग करके परीक्षण किया जा सकता है ?

भिन्न वर्ग योगों के लिए स्पष्ट व्यंजकों के और उपर्युक्त परिकल्पनाओं के लिए परीक्षण दर्शजों के साथ प्रसरण विश्लेषण सारणी दीजिए। 20

(ग) एक ओर तो उपचारों की संख्या और प्रति उपचार प्रतिकृतियों की संख्या में लचक और दूसरी ओर त्रुटि नियंत्रण को ध्यान में रखते हुए पूर्णतः यादृच्छिकीकृत अभिकल्पना, यादृच्छिकीकृत खंडक अभिकल्पना और लेटिन वर्ग अभिकल्पना की तुलना कीजिए। 20



Serial No.

C-DTN-J-TUA

सांख्यिकी

प्रश्न-पत्र—I

समय : तीन घण्टे

पूर्णांक : 300

अनुदेश

प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपा है। प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख उत्तर-पुस्तक के मुखपृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्रवेश-पत्र पर उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं दिये जाएंगे।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं। बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

यदि आवश्यक हो तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न के लिए नियत अंक प्रश्न के अंत में दिये गए हैं।

प्रयुक्त संकेत और प्रतीक प्रचलित पद्धति के अनुसार हैं।

Note : English version of the Instructions is printed on the front cover of this question paper.